



Departamento de Matemáticas

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ASIGNATURA:	Cálculo multivariado
CÓDIGO:	CB 4A4
REQUISITOS:	Cálculo integral CB3A4
PROGRAMAS:	Ingenierías, Tecnologías, Química Industrial
INTENSIDAD HORARIA:	5 Horas por semana
CRÉDITOS:	4
TIPO:	Teórico - Práctica

1. OBJETIVO GENERAL.

La mayor parte de las aplicaciones de la ingeniería y de la física están relacionadas con el cálculo multivariado. Los flujos, densidad y circulación, la corriente o el movimiento planetario se rigen por leyes universales de la física que se expresan mediante ecuaciones integrales en varias variables. Teoremas como el de Gauss, o el de Stokes, son las herramientas más sobresalientes en esta asignatura.

Al finalizar el curso el estudiante deberá comprender el concepto de cálculo multivariado y su relación con las múltiples aplicaciones en su área, especialmente deberá comprender la esencia del teorema de Gauss y del teorema de Stokes.

2. **RESULTADOS DE APRENDIZAJE.** El estudiante que apruebe este curso estará en capacidad de:

- 2.1. Mejorar la comprensión de la representación de superficies en el espacio.
- 2.2. Entender los modelos matemáticos que representan el movimiento de cuerpos en el plano y en el espacio.
- 2.3. Entender el modelo matemático que representa la dinámica de flujos, el concepto de trabajo y los campos de fuerza o de un fluido.
- 2.4. Entender el teorema de Stokes y el teorema de la divergencia como generalizaciones del teorema fundamental del cálculo en una variable.
- 2.5. Comprender que el concepto de continuidad en varias variables es sustancialmente diferente que en el caso de una variable.
- 2.6. Comprender y construir el concepto de la diferencial total como una transformación lineal.
- 2.7. Reconocer las razones por las cuales las existencias de todas las derivadas direccionales en un punto no implican que la función sea continua.
- 2.8. Tener una comprensión global del cálculo integral en varias variables como el modelo matemático mediante el cual se estudiaron la mayor parte de los fenómenos de la física, las ingenierías y demás ramas afines del análisis.
- 2.9. Entender y utilizar las integrales múltiples, y calcularlas como integrales iteradas.

3. RESULTADOS DE APRENDIZAJE Y CONTENIDOS ESPECÍFICOS POR UNIDAD.

La aprobación de este curso dará como resultado un estudiante capacitado para:

3.1 UNIDAD 1. INTRODUCCIÓN A LAS SUPERFICIES Y CURVAS EN EL ESPACIO. (1 semana)

3.1.1 Resultados de aprendizaje

3.1.1.1 Dibujar y representar algunas superficies y curvas en el espacio.

3.1.1.2 Interpretar las gráficas de superficies básicas y relacionarlas con sus respectivas ecuaciones algebraicas.

3.1.2 Contenidos

3.1.2.1 Gráficas de planos. Representación gráfica la intersección de dos planos en \mathbb{R}^3

3.1.2.2 Ecuaciones y gráficas de cilindros, de la esfera, el elipsoide, el paraboloides hiperbólico.

3.1.2.3 Gráficas de curvas sobre superficies.

3.2 UNIDAD 2. FUNCIONES VECTORIALES (3 semanas)

3.2.1 Resultados de aprendizaje

3.2.1.1 Dibujar curvas en el plano y en el espacio.

3.2.1.2 Analizar el movimiento de partículas sobre curvas en el espacio.

3.2.1.3 Dibujar superficies a partir de sus curvas de nivel.

3.2.2 Contenidos

3.2.2.1 Parametrización de curvas en el plano y el espacio.

3.2.2.2 Vector tangente, vector velocidad y vector aceleración de una curva.

3.2.2.3 Vectores normal y binormal, curvatura, plano y círculo osculador de la curva descrita por una partícula en movimiento.

3.2.2.4 Funciones escalares, cuádricas, superficies y curvas de nivel de una superficie.

3.2.2.5 Funciones vectoriales de variable vectorial. Gráficas y análisis de campos de flujos y fluidos.

3.3 UNIDAD 3. CÁLCULO DIFERENCIAL: (4 semanas)

3.3.1 Resultados de aprendizaje

3.3.1.1 Comprender el concepto de derivada en varias variables.

3.3.1.2 Comprender el concepto de derivada total y función diferenciable en varias variables.

3.3.1.3 Entender y calcular derivadas en varias variables usando la regla de la cadena.

3.3.1.4 Aplicar los conceptos básicos del cálculo diferencial a los conceptos de trabajo, densidad de flujo y circulación.

3.3.1.5 Aplicar los conceptos básicos del cálculo diferencial en varias variables para calcular valores extremos de funciones diferenciables y de funciones diferenciables con restricciones.

3.3.2 Contenidos

3.3.2.1 Campos escalares.

3.3.2.2 Derivada direccional.

3.3.2.3 La existencia de las derivadas direccionales de una función escalar no implica la continuidad.

3.3.2.4 Derivada total.

3.3.2.5 Diferenciabilidad implica continuidad.

3.3.2.6 Cálculo de la derivada de una función escalar diferenciable. El gradiente.

3.3.2.7 Regla de la cadena sobre campos escalares.

3.3.2.8 Derivadas sobre campos vectoriales.

3.3.2.9 Ejemplos de campos de flujo y campos de fuerza.

3.3.2.10 Gráficas de campos vectoriales.

3.3.2.11 La diferencial de un campo vectorial.

3.3.2.12 Regla de la cadena en campos vectoriales.

3.3.2.13 Máximos y mínimos.

3.3.2.14 Multiplicadores de Lagrange.

3.4 UNIDAD 4. CÁLCULO INTEGRAL EN VARIAS VARIABLES. (4 semanas)

3.4.1 Resultados de aprendizaje

- 3.4.1.1 Aplicar el modelo matemático del cálculo integral en varias variables, a conceptos como los de trabajo, circulación, densidad, campo de fuerzas, campo de velocidades de un flujo, flujo a través de una curva o una superficie.
- 3.4.1.2 Aplicar el teorema de Green en la solución de diversos problemas de la física y la ingeniería.
- 3.4.1.3 Resolver a través de representaciones geométricas y algebraicas, diversos problemas relacionados con el cálculo integral en varias variables.

3.4.2 Contenidos

- 3.4.2.1 Integrales de línea.
- 3.4.2.2 El trabajo realizado por una fuerza en el plano.
- 3.4.2.3 Densidad de un flujo en el plano y densidad alambres en el plano.
- 3.4.2.4 La circulación.
- 3.4.2.5 El cálculo de una integral de línea.
- 3.4.2.6 Funciones potenciales y campos conservativos.
- 3.4.2.7 Los teoremas fundamentales para integrales de línea.
- 3.4.2.8 Integrales múltiples
- 3.4.2.9 Integrales dobles.
- 3.4.2.10 El rotacional en el plano.
- 3.4.2.11 El teorema de Green.
- 3.4.2.12 Flujo a través de una curva.
- 3.4.2.13 El teorema de la divergencia en el plano.
- 3.4.2.14 Cambio de variable en una integral doble.
- 3.4.2.15 Integrales triples.
- 3.4.2.16 Cambio de variable en integrales triples.
- 3.4.2.17 Aplicación de las integrales triples al cálculo de volúmenes, densidades de volúmenes.
- 3.4.2.18 Otras aplicaciones de la integral triple a problemas de la física y la ingeniería.

3.5 UNIDAD 5. CÁLCULO INTEGRAL EN VARIAS VARIABLES SOBRE SUPERFICIES. (4 semanas)

3.5.1 Resultados de aprendizaje

- 3.5.1.1 Tener clara la diferencia entre una superficie y un volumen.
- 3.5.1.2 Comprender y realizar parametrizaciones de superficies y volúmenes en el espacio.
- 3.5.1.3 Calcular el área de una superficie en el espacio y en el plano.
- 3.5.1.4 Comprender el modelo matemático para calcular el flujo a través de una superficie.
- 3.5.1.5 Calcular el flujo a través de una superficie.
- 3.5.1.6 Comprender y aplicar el teorema de Stokes sobre superficies con frontera.
- 3.5.1.7 Comprender y calcular el teorema de Gauss sobre volúmenes con frontera.
- 3.5.1.8 Entender que los teoremas de Green, Stokes y Gauss son generalizaciones del teorema fundamental del cálculo en una variable.
- 3.5.1.9 Aplicaciones de las integrales múltiples a problemas de la física y la ingeniería.

3.5.2 Contenidos

- 3.5.2.1 Parametrización de curvas y superficies en el espacio.
- 3.5.2.2 Calcular áreas de superficies.
- 3.5.2.3 El rotacional en el espacio.
- 3.5.2.4 Desarrollar el concepto de campo de velocidades de un flujo y campo de densidades de un flujo en el espacio.
- 3.5.2.5 El teorema de Stokes.
- 3.5.2.6 El flujo a través de una superficie.

3.5.2.7 El teorema de la divergencia de Gauss.

3.5.2.8 Aplicaciones a diversos problemas de la física y la ingeniería.

4. METODOLOGÍA

El docente tiene toda la autonomía de elegir su metodología de trabajo. No obstante, se sugiere que la misma le permita al alumno participar activamente en su proceso de aprendizaje, donde el estudiante lea con anterioridad, se promueva el trabajo en grupo, y se facilite en el educando el desarrollo de habilidades como: razonar, modelar, argumentar, comunicar, resolver problemas, entre otras.

De igual manera se sugiere que los profesores generen estrategias de aprendizaje con los estudiantes que promuevan el desarrollo de las operaciones intelectuales de alto nivel. Una de estas estrategias puede ser, antes de iniciar cada unidad entregar un taller a los estudiantes con no más de 10 preguntas.

El propósito de entregar el taller antes de iniciar cada unidad es para que el estudiante tenga realice una lectura previa de los ejercicios propuestos, se familiarice con ellos y esté atento al desarrollo de los conceptos que se ven en cada una de las sesiones de clase, lo que le permitirá identificar la teoría que lo acercará a la solución de los ejercicios.

Los talleres deben contener por lo menos 5 sesiones:

- Una situación problema que los lleve a involucrar los temas a desarrollar durante la unidad, o la puedan resolver al indagar y usar sus conocimientos previos.
- Actividades que pueden ser de teoría que les permita proponer alguna solución, generalización, clasificación o particularización.
- Preguntas para decidir su valor de verdad, con las cuales se verifican los conceptos, el alumno propone hipótesis, conjeturas, argumenta, demuestra o plantea contraejemplos. Además, se le permite familiarizarse con leyes, propiedades y regularidades del tema de cada unidad.
- Ejercicios de tipo algorítmico o procedimental.
- Aplicaciones en la vida cotidiana o en el contexto matemático.

Se sugiere que los talleres se pueden presentar en grupo, pero todos los integrantes del grupo deben sustentarlos, aunque la nota es individual, dependiendo de la participación, compromiso, aportes, entre otros. Se fomentará la autoevaluación y coevaluación.

Estos talleres pueden ser sustentados al profesor o al monitor del acompañamiento académico. La nota tendrá un porcentaje adicional sobre la valoración obtenida sobre el parcial, (el profesor tiene libertad de escoger el porcentaje, previo acuerdo con el coordinador del curso).

Otra de las estrategias sugeridas para el seguimiento en el proceso de aprendizaje, que permita fortalecer y desarrollar el trabajo autónomo y autorregulado de los estudiantes, es realizar pruebas cortas o quices, las cuales se podrán realizar en por lo menos dos de las sesiones de clase por cada semana. Dichas pruebas cortas o quices deben estar planeados para no más de 10 minutos, con las al menos una de las siguientes características:

- **Control de lectura.** Permitirán identificar si el alumno leyó antes de clase el tema a desarrollar. Es para verificar lectura, no para comprobar si entendió o no el tema.
- **Retroalimentación.** Verificar si el estudiante estudió y entendió el tema o temas de las clases anteriores. Le ayudará a retroalimentar su proceso de aprendizaje.

- **Desarrollo de la clase.** Valorar la atención y participación del alumno en la clase.

Los quices se califican y su nota incrementará a la nota obtenida en el examen parcial (el profesor tiene libertad de escoger el porcentaje que aplicará a las pruebas). Para esta nota se tendrá en cuenta sólo los que estén aprobados.

Los quices de retroalimentación pueden recuperarse con el monitor, previo acuerdo entre el profesor y el monitor.

Cuando sea pertinente el profesor diseñará ejercicios especiales, retadores, para los estudiantes. Ejercicios que permitan relacionar el tema visto con el que se desarrollará en la próxima clase.

Para lograr lo anterior, se propone implementar la filosofía del proyecto educativo institucional, PEI, en la que se sugiere que el estudiante debe realizar dos horas de trabajo independiente por cada hora de clase.

Las actividades del estudiante para lograr los objetivos propuestos deben incluir:

- **Antes de la clase:** Estudiar el tema explicado por el profesor para esta clase, siguiendo sus orientaciones. Esta actividad incluye aprender los conceptos, comprenderlos y aplicarlos en las respuestas a las preguntas formuladas, el análisis de los ejemplos resueltos y en la solución de los ejercicios y problemas asignados. Además, escribir las preguntas y dudas que le surjan durante la preparación del material.
- **Después de la clase:** Buscar la consolidación del nuevo conocimiento mediante la solución de ejercicios complementarios, en el programa de acompañamiento académico y establecer relaciones con el tema de la siguiente clase. No conformarse con entender, sino profundizar en lo aprendido, para lo cual se propone hacer un seguimiento.

Con el fin de contextualizar los aprendizajes en cada uno de los programas académicos, se sugieren las siguientes estrategias, discriminadas por cada unidad de contenido:

Para la Unidad 1, **Introducción a las superficies y curvas en el espacio.:** Esta unidad es introductoria pero su contenido es de vital importancia para el curso, porque requiere el desarrollo del pensamiento gráfico, y de su generalización, el pensamiento geométrico.

Para la Unidad 2, **Funciones vectoriales:** En esta unidad, se pretende incrementar las capacidades de cálculo de los estudiantes al pasar de cálculos en una variable a cálculos e interpretaciones en varias variables. Finalmente, se apunta a un mayor grado de generalidad, en el que los conceptos se conservan, pero el número de dimensiones aumenta, haciendo el trabajo conceptual en lugar de gráfico.

Para la Unidad 3, **Cálculo Diferencial:** En esta unidad se desarrolla el concepto de diferencial total, y se aplica a problemas de ingeniería. La primera mitad del trabajo consiste en cambiar la concepción de la derivada como un número (o una función de una variable) a una transformación lineal, que se describe en la base canónica usando las derivadas parciales. Además de calcular, es necesario que se aprenda que la diferencial es más compleja que en el caso de una variable, y que se aprecien sus aplicaciones.

Para la Unidad 4, **Cálculo Integral en varias variables.:** Se quiere desarrollar los conceptos del cálculo integral a partir de intuiciones físicas, concretamente de los problemas de trabajo, densidad, circulación de flujos y rotacional. A partir de los conceptos físicos, se generaliza y extrapola para obtener conceptos en cálculo, para los que se encuentran aplicaciones, no solo las que dieron origen a los conceptos, sino otras en campos diferentes.

Para la Unidad 5, **Cálculo integral en varias variables sobre superficies.:** Primero, es necesario

ambientar al estudiante para que plantee y resuelva problemas en un campo más general, a saber, las superficies. Después de familiarizarse con estos objetos, es necesario extrapolar los conceptos de rotacional, flujo, densidad, etc. a objetos descritos mediante parametrizaciones, con el fin de generalizar los resultados de la unidad anterior, y lograr los teoremas de Stokes y Gauss, como versiones sofisticadas del teorema de Green. Finalmente, es vital que los estudiantes sepan que estos teoremas no son herramientas de cálculo sino avances conceptuales, con una enorme gama de aplicaciones en los distintos campos de la ingeniería.

5. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Apostol Tom M. Calculus, volume II. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. (1984). 2da edición. Editorial Reverté S. A.
- [2] Larson Ron, Hostetler Robert P. y Edwards Bruce H. Multivariable Calculus. (2005). 8th Edition. Cengage Learning.
- [3] Stewart James, Clegg Daniel K ., Watson Saleem. Multivariable Calculus (2020). 9ª, edición. Cengage Learning.
- [4] Purcell Edwin J., Varberg Dale y Rigdon Steven E. Cálculo (2007). 9ª edición. Pearson Educación
- [5] Spiegel Murray R., Lipschuta Seymour, Spellman Dennis. Análisis vectorial. (2011). 2da edición. Ed McGraw-Hill.
- [6] Spiegel Murray R.. Cálculo superior. (1991). 1ra edición. Ed McGraw-Hill.

6. EVALUACIÓN

La evaluación final será unificada y contendrá todos los temas que se describieron en el contenido y tiene una valoración del 30% de la nota del curso. Anexo a este documento, se encuentran algunas preguntas que se pueden usar como modelo para las evaluaciones, o para las tareas, que evalúan las competencias propuestas en cada unidad de contenido.

Distribución de porcentajes para las evaluaciones

EVALUACIÓN	PORCENTAJE		
Evaluación I Recuerde: Por reglamento el 30% de la nota del curso debe estar registrada en la plataforma a más tardar el primer día de la semana 8ª.	Opción I	Examen I	15 %
		Examen II	15 %
	Opción II	Examen I	10 %
		Examen II	20 %
	Opción III	Un sólo examen	30%
	Evaluación II	20%	
Evaluación III	20%		
Examen final Recuerde: Es el 30% porque el examen es unificado.	30%		

Observaciones, se sugiere que:

- Las evaluaciones contengan ejercicios que permitan por lo menos evaluar el desempeño: algorítmico, argumentativo y demostrativo (Preguntas de falso y verdadero), modelación (contextualización de los conceptos, aplicaciones o situaciones problema).
- Todos los exámenes que se hagan deben ser **enviados por lo menos con una semana de anterioridad a la fecha de realización del mismo**, al coordinador del curso, esto con el fin de unificar criterios de evaluación y analizar aspectos relacionados con los procesos de enseñanza y aprendizaje.
- Las actividades extra curriculares que se asignen como talleres o tareas, deben ser sustentadas por los estudiantes, si las mismas son tenidas en cuenta como parte de la evaluación.
- La valoración del examen final únicamente es la que el alumno obtenga en su examen, **no incluye décimas** por talleres o similares.