



**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA**  
**FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

<b>ASIGNATURA:</b>	<b>Ecuaciones Diferenciales</b>
<b>CÓDIGO:</b>	<b>CB 4A3</b>
<b>REQUISITOS:</b>	<b>Cálculo Integral CB3A4–Álgebra lineal CB223</b>
<b>PROGRAMAS:</b>	<b>Ingenierías, Tecnologías, Química Industrial</b>
<b>INTENSIDAD HORARIA:</b>	<b>4 Horas por semana</b>
<b>CRÉDITOS:</b>	<b>3</b>
<b>TIPO:</b>	<b>Teórico - Práctica</b>

### **1. OBJETIVO GENERAL.**

El estudiante que apruebe este curso estará en capacidad de modelar sistemas usando el lenguaje de los sistemas de ecuaciones diferenciales, analizar cualitativamente las características de las soluciones del sistema y aprovechar las herramientas de cálculo que le permitan obtener aproximaciones de estas soluciones.

**2. RESULTADOS DE APRENDIZAJE.** El estudiante que apruebe este curso estará en capacidad de:

- 2.1 Plantear sistemas que relacionen las variables relevantes en un problema de ingeniería.
- 2.2 Intercambiar entre situaciones en una sola variable y las situaciones correspondientes descritas en varias variables.
- 2.3 Resolver sistemas lineales y describir sus características en términos de estabilidad, intervalo de definición y comportamiento en infinito.
- 2.4 Interpretar soluciones numéricas de sistemas de ecuaciones, incluso las que contienen uno o varios parámetros, y detectar si existe bifurcación, y su significado.
- 2.5 Utilizar métodos y herramientas matemáticos que permiten acercarse a la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales.
- 2.6 Detectar la presencia e importancia de los modelos con ecuaciones diferenciales en la física y la ingeniería.

**3. RESULTADOS DE APRENDIZAJE Y CONTENIDOS ESPECÍFICOS POR UNIDAD.** La aprobación de este curso dará como resultado un estudiante capacitado para:

#### **3.1 UNIDAD 1. ECUACIONES DE PRIMER ORDEN. (6 semanas)**

##### **3.1.1 Resultados de aprendizaje**

- 3.1.1.1 Proponer modelos con ecuaciones diferenciales, y sus condiciones iniciales.
- 3.1.1.2 Identificar las soluciones y sus características, y la asociación que tienen estas con las características del modelo
- 3.1.1.3 Hallar los puntos de equilibrio de un modelo, y determinar su estabilidad.
- 3.1.1.4 Estudiar modelos que contengan un parámetro y descubrir si presentan bifurcaciones.

- 3.1.1.5 Utilizar técnicas concretas para resolver ciertas ecuaciones diferenciales, y descubrir sus limitaciones.

### **3.1.2 Contenidos**

- 3.1.2.1 Introducción, un primer modelo
- 3.1.2.2 Terminología general. Orden de una ecuación. Ecuaciones lineales y no lineales. Ecuaciones autónomas. Problemas con condiciones iniciales.
- 3.1.2.3 Soluciones. Soluciones explícitas. Soluciones generales y particulares. Intervalos de definición. Soluciones implícitas. El teorema de la función implícita.
- 3.1.2.4 El teorema de existencia y unicidad.
- 3.1.2.5 Herramientas computacionales. SCILAB. Campos de pendientes. Isóclinas y nulclinas. Diagramas y líneas de fase.
- 3.1.2.6 Separación de variables. El teorema fundamental del cálculo.
- 3.1.2.7 Ecuaciones autónomas de primer orden. Estabilidad y bifurcación. Condiciones analíticas.
- 3.1.2.8 Algunas ecuaciones no lineales. Bernoulli y Riccati. Ecuaciones homogéneas y exactas.

## **3.2 UNIDAD 2. SISTEMAS DE PRIMER ORDEN (5 semanas)**

### **3.2.1 Resultados de aprendizaje**

- 3.2.1.1 Proponer e interpretar sistemas de ecuaciones diferenciales como modelos de situaciones en ingeniería.
- 3.2.1.2 Reducir un sistema de ecuaciones de orden superior a un sistema de primer orden.
- 3.2.1.3 Hallar los puntos de equilibrio de un sistema de ecuaciones y determinar su estabilidad.
- 3.2.1.4 Dibujar el retrato de fase de un sistema dos por dos, y extrapolar la situación para un sistema de tamaño mayor.
- 3.2.1.5 Analizar los sistemas no homogéneos a partir de los sistemas homogéneos asociados.
- 3.2.1.6 Completar el análisis de un sistema no homogéneo usando una solución particular.

### **3.2.2 Contenidos**

- 3.2.2.1 Introducción. El modelo depredador - presa.
- 3.2.2.2 Retratos de fase. Puntos de equilibrio. Soluciones de equilibrio.
- 3.2.2.3 Sistemas lineales homogéneos. La matriz exponencial. Propiedades de la matriz exponencial.
- 3.2.2.4 Cálculo de la matriz exponencial. Similaridad. Valores y vectores propios. Propiedades. El Wronskiano.
- 3.2.2.5 Clasificación de retratos de fase para sistemas lineales. Sistemas  $2 \times 2$ . Sistemas lineales en tres dimensiones.
- 3.2.2.6 El oscilador armónico simple. Sistemas elásticos amortiguados.
- 3.2.2.7 Sistemas no homogéneos. El método de los coeficientes indeterminados. Variación de parámetros. El oscilador armónico forzado. Resonancia.

## **3.3 UNIDAD 3. TRANSFORMADA DE LAPLACE Y SOLUCIONES CON**

## **SERIES DE POTENCIAS: (4 semanas)**

### **3.3.1 Resultados de aprendizaje**

- 3.3.1.1 Aplicar una técnica de transformación para acercarse a la solución de un sistema,
- 3.3.1.2 Incorporar condiciones iniciales a un problema para incluirla en la solución usando una transformación.
- 3.3.1.3 Resolver problemas de impulsos usando la delta de Dirac.
- 3.3.1.4 Expresar funciones complejas usando la función escalón unitario.
- 3.3.1.5 Calcular soluciones analíticas de problemas complejos usando series de potencias.
- 3.3.1.6 Usar las propiedades de las soluciones de las ecuaciones de Bessel y Legendre.

### **3.3.2 Contenidos**

- 3.3.2.1 La transformada de Laplace. Definición. Propiedades básicas. La transformada de algunas funciones. Los teoremas básicos.
- 3.3.2.2 Solución de problemas con condiciones iniciales usando el operador de Laplace
- 3.3.2.3 La función escalón unitario. Ecuaciones con funciones discontinuas. Funciones de impulso,
- 3.3.2.4 *Solución con series de potencias.* Funciones analíticas. El teorema de existencia para ecuaciones con coeficientes analíticos
- 3.3.2.5 Ecuaciones de recurrencia
- 3.3.2.6 Algunas funciones especiales. Bessel, Legendre

## **4. METODOLOGÍA**

El docente tiene toda la autonomía de elegir su metodología de trabajo. No obstante, se sugiere que la misma le permita al alumno participar activamente en su proceso de aprendizaje, donde el estudiante lea con anterioridad, se promueva el trabajo en grupo, y se facilite en el educando el desarrollo de habilidades como: razonar, modelar, argumentar, comunicar, resolver problemas, entre otras.

De igual manera se sugiere que los profesores generen estrategias de aprendizaje con los estudiantes que promuevan el desarrollo de las operaciones intelectuales de alto nivel. Una de estas estrategias puede ser, antes de iniciar cada unidad entregar un taller a los estudiantes con no más de 10 preguntas.

El propósito de entregar el taller antes de iniciar cada unidad es para que el estudiante tenga realice una lectura previa de los ejercicios propuestos, se familiarice con ellos y esté atento al desarrollo de los conceptos que se ven en cada una de las sesiones de clase, lo que le permitirá identificar la teoría que lo acercará a la solución de los ejercicios.

Los talleres deben contener por lo menos 5 sesiones:

- Una situación problema que los lleve a involucrar los temas a desarrollar durante la unidad, o la puedan resolver al indagar y usar sus conocimientos previos.
- Actividades que pueden ser de teoría que les permita proponer alguna solución, generalización, clasificación o particularización.

- Preguntas para decidir su valor de verdad, con las cuales se verifican los conceptos, el alumno propone hipótesis, conjeturas, argumenta, demuestra o plantea contraejemplos. Además, se le permite familiarizarse con leyes, propiedades y regularidades del tema de cada unidad.
- Ejercicios de tipo algorítmico o procedimental.
- Aplicaciones en la vida cotidiana o en el contexto matemático.

Se sugiere que los talleres se pueden presentar en grupo, pero todos los integrantes del grupo deben sustentarlos, aunque la nota es individual, dependiendo de la participación, compromiso, aportes, entre otros. Se fomentará la autoevaluación y coevaluación.

Estos talleres pueden ser sustentados al profesor o al monitor del acompañamiento académico. La nota tendrá un porcentaje adicional sobre la valoración obtenida sobre el parcial, (el profesor tiene libertad de escoger el porcentaje, previo acuerdo con el coordinador del curso).

Otra de las estrategias sugeridas para el seguimiento en el proceso de aprendizaje, que permita fortalecer y desarrollar el trabajo autónomo y autorregulado de los estudiantes, es realizar pruebas cortas o quices, las cuales se podrán realizar en por lo menos dos de las sesiones de clase por cada semana. Dichas pruebas cortas o quices deben estar planeados para no más de 10 minutos, con las al menos una de las siguientes características:

- **Control de lectura.** Permitirán identificar si el alumno leyó antes de clase el tema a desarrollar. Es para verificar lectura, no para comprobar si entendió o no el tema.
- **Retroalimentación.** Verificar si el estudiante estudió y entendió el tema o temas de las clases anteriores. Le ayudará a retroalimentar su proceso de aprendizaje.
- **Desarrollo de la clase.** Valorar la atención y participación del alumno en la clase.

Los quices se califican y su nota incrementará a la nota obtenida en el examen parcial (el profesor tiene libertad de escoger el porcentaje que aplicará a las pruebas). Para esta nota se tendrá en cuenta sólo los que estén aprobados.

Los quices de retroalimentación pueden recuperarse con el monitor, previo acuerdo entre el profesor y el monitor.

Cuando sea pertinente el profesor diseñará ejercicios especiales, retadores, para los estudiantes. Ejercicios que permitan relacionar el tema visto con el que se desarrollará en la próxima clase.

Para lograr lo anterior, se propone implementar la filosofía del proyecto educativo institucional, PEI, en la que se sugiere que el estudiante debe realizar dos horas de trabajo independiente por cada hora de clase.

Las actividades del estudiante para lograr los objetivos propuestos deben incluir:

- **Antes de la clase:** Estudiar el tema explicado por el profesor para esta clase, siguiendo sus orientaciones. Esta actividad incluye aprender los conceptos, comprenderlos y aplicarlos en las respuestas a las preguntas formuladas, el análisis de los ejemplos resueltos y en la solución de los ejercicios y problemas asignados. Además, escribir las preguntas y dudas que le surjan durante la preparación del material.

- **Después de la clase:** Buscar la consolidación del nuevo conocimiento mediante la solución de ejercicios complementarios, en el programa de acompañamiento académico y establecer relaciones con el tema de la siguiente clase. No conformarse con entender, sino profundizar en lo aprendido, para lo cual se propone hacer un seguimiento.

**Con el fin de contextualizar los aprendizajes en cada uno de los programas académicos, se sugieren las siguientes estrategias, discriminadas por cada unidad de contenido:**

Para la **Unidad 1, Ecuaciones de primer orden**. Los siguientes puntos muestran el propósito en cada uno de los numerales que conforman el contenido de la primera unidad:

1. La idea es iniciar el curso presentando un modelo que muestre lo importantes e interesantes que son las ecuaciones diferenciales, ED. Usualmente los textos empiezan con algún ejemplo clásico como las ecuaciones de Newton (Teschl), el decaimiento radioactivo (Robinson) o el crecimiento de poblaciones (Blanchard). Se puede presentar incluso un modelo muy general como la forma en que las compañías farmacéuticas prescriben medicamentos como los antihistamínicos (Borrel - Colemans).
2. Simplemente se trata de definir varios términos que serán usados a lo largo del curso.
3. Cuando se busca solución a una ecuación diferencial es importante tener presente varias cosas. Que encontrar soluciones explícitas es en general imposible a menos que la ecuación tenga una forma particular (Teschl). Si hay una solución explícita determinar el intervalo de definición y el comportamiento de la solución. Con varios métodos se encuentran soluciones en forma implícita. En este caso es importante determinar, por ejemplo, si es posible obtener de ahí una solución explícita o usando el teorema de la función implícita, determinar los puntos en los que existe un intervalo y una función solución definida en él.
4. Como ya se mencionó, son pocas las ecuaciones diferenciales que tienen soluciones explícitas. Actualmente hay muchos sistemas computacionales que son de gran ayuda para hacer un análisis cualitativo de una ecuación, algunos de licencia pública como Scilab, Maxima o ScalaLab, otros comerciales como Matlab o Mathematica. Obviamente no se trata de reducir todo a simplemente digitar la ecuación, presionar enter y esperar por la respuesta. "Como siempre, la vida no es tan fácil" (Teschl). Conceptos como *isoclinas* o *diagrama de fase* se pueden definir teóricamente y la parte del manejo de aplicaciones computacionales dejarla a cargo de monitores capacitados para eso.
5. Este puede ser un tema de la matemática II (Aplicaciones de los teoremas fundamentales del cálculo). Se puede hacer un buen repaso del teorema y mostrar cómo solucionar con este método diversos modelos.
6. La teoría de las ecuaciones autónomas de primer orden es un tema adecuado para presentar algunos de los conceptos fundamentales de la teoría de sistemas dinámicos. Con ejemplos sencillos e interesantes se pueden ilustrar conceptos tan importantes como *estabilidad* y *bifurcación*.

Una sugerencia más está relacionada con el tipo de ejercicios a proponer. La idea es reducir la componente de "cálculo" y enfatizar el análisis cualitativo. Tomemos como un ejemplo sencillo el ejercicio 8.10 propuesto en el libro de Robinson. Se tiene la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = x^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad x(0) \geq 0$$

El cálculo de la solución de la ecuación es inmediato. Pero lo interesante son las preguntas que se plantean:

- Mostrar que el único valor para el que hay única solución en todo el dominio de los números reales es  $\alpha=1$
- Mostrar que si  $\alpha < 1$  hay condiciones iniciales para las que no hay única solución.
- Mostrar que si  $\alpha > 1$  toda solución "blow up" en un tiempo finito.

Otra sugerencia consiste en motivar a los estudiantes para que encuentren aplicaciones en su campo de interés, que pueden no ser las de todos los textos. Como un ejemplo del mundo real, la cadena gigante de supermercados Walmart supone que las ventas de los bienes están modeladas por la curva logística. Para cada ítem ellos chequean mensualmente para ver si el punto de inflexión en la curva logística se ha alcanzado. Cuando lo hace, ellos descontinúan el almacenamiento de bienes. Como resultado, Walmart raramente hace promociones (sales) en ítems descontinuados.

También se considera que los temas propuestos se pueden tratar en 6 semanas de clase:

- 1a semana. Temas 1, 2 y 3.
- 2a semana. Temas 4 y 5. Nuevamente se sugiere que el tema del uso de herramientas computacionales sea trabajo extraclase.
- Semanas 3 y 4. Temas 6 y 7
- Semanas 5 y 6. Temas 8 y 9.

Para la **Unidad 2, sistemas de primer orden**. Usualmente un segundo capítulo en un curso de ecuaciones diferenciales se dedicaba básicamente a estudiar las soluciones de la ecuación lineal de segundo orden; problemas del tipo:

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = y_0$$

Los teoremas de existencia y unicidad pueden garantizar soluciones para muchos de estos problemas, pero, como escribe David Sánchez, es muy importante tener en cuenta que esa ecuación solo admite soluciones exactas en tres casos:

- $a(t), b(t)$  constantes. En este caso las soluciones son prácticamente triviales.
- Es una ecuación de Euler.
- Un hada bondadosa nos entrega una primera solución  $x_1(t)$  y entonces, usando reducción de orden podemos obtener (si no hay problemas con las integrales) una segunda solución.

Entonces, ¿por qué no evitar ese *tour de force* por los campos del Álgebra Lineal para llegar a resultados básicos y mejor, como sugiere nuevamente David Sánchez, estudiar el sistema lineal general en dimensión dos:

$$\begin{aligned}x' &= a(t)x + b(t)y \\ y' &= c(t)x + d(t)y\end{aligned}$$

y después aplicar esta teoría al caso particular  $a(t)=0, b(t)=1$  que resulta en la ecuación antes mencionada?

El estudio del sistema de dos ecuaciones permite apreciar mejor la aplicación del Álgebra Lineal a los sistemas dinámicos. Schaeffer y Cain escriben

“Use esos resultados! Para nuestra frustración, generaciones de estudiantes los han ignorado, malgastando su tiempo calculando valores propios cuando eso no es actualmente necesario.”

Los autores se refieren a resultados como el siguiente:

Sea  $\mathbf{A}$  una matriz  $2 \times 2$  con entradas reales y con valores propios  $\lambda_j$ .

$$\operatorname{Re}(\lambda_j < 0) \text{ sii } \operatorname{tr}(\mathbf{A}) < 0 \text{ y } \operatorname{det}(\mathbf{A}) > 0$$

Esto nos puede decir mucho acerca de la dinámica del sistema.

1. Nuevamente se propone introducir el tema con un modelo interesante. Si no es con las ecuaciones de Lotka - Volterra puede ser con el modelo de interacción Insulina - Glucosa o algún otro. Hay muchos muy interesantes.
2. Los retratos de fase son una gran herramienta para el análisis cualitativo de los sistemas. Permiten ver que es posible un balance entre las dos especies (equilibrio). Pero también permite ver falencias del modelo, hacer preguntas que sean alimento para el pensamiento [Schaeffer]: ¿No importa cuán pequeño sea  $x(0)$ , los depredadores nunca se extinguen? ¿Cómo mejorar el modelo?
3. John Craig escribió: "Los matemáticos clasifican los sistemas en lineales y no lineales. Es como si un zoólogo clasificara a los animales en los que son elefantes y los que no son elefantes." Y el biólogo matemático R. May escribió: "Los sistemas lineales matemáticos tienden a dominar aun moderadamente cursos universitarios avanzados.

La intuición matemática así desarrollada prepara mal al estudiante para confrontar el extraño comportamiento exhibido por el más simple de los sistemas no lineales. Sin embargo, los sistemas no lineales son ciertamente la regla, no la excepción, no solo en la investigación, sino también en el mundo cotidiano".

A pesar de las citas anteriores, un tanto malévolas, la teoría lineal es una de las teorías matemáticas más completas y útiles. El teorema principal da la solución en términos de la matriz exponencial. Con las propiedades de esta matriz se pueden analizar varios tipos de sistemas.

En la unidad 3, **Transformada de Laplace y soluciones con series de potencias.**

Los dos temas del título tienen una característica curiosa. En los textos y en los cursos típicos se les dedican capítulos muy extensos. Pero algunos autores consideran el método de la transformada como otra herramienta más, además de la variación de parámetros y los coeficientes indeterminados para resolver ecuaciones no homogéneas, principalmente cuando el término no homogéneo es discontinuo o una función de impulso [Ricardo - Blanchard]. Otros autores consideran que su ventaja es el manejo de todas las fuerzas de forzamiento de la misma manera. M. Braun apenas le dedica una sección del capítulo de segundo orden. ¡Y muchos otros autores ni siquiera la mencionan! (Kelly - Peterson, J. Robinson) Claro que también se puede resaltar la importancia de esa herramienta para carreras como la ingeniería eléctrica. Pero aún en ese caso es recomendable dejar el trabajo de tareas áridas como el cálculo de fracciones parciales a los sistemas computacionales y enfocarse más en aspectos como el uso de la transformada para el análisis cualitativo con temas usualmente poco tratados como el de las funciones de transferencia.

El tema de soluciones con series de potencias también es muy discutido. Algunos autores lo consideran simplemente un método más de aproximación numérica. Solo citando nuevamente a D. Sánchez, respecto al tema opina que no tiene sentido hoy en día dedicar tiempo a tediosas construcciones analizando toda clase de casos excepcionales, puntos singulares, casos logarítmicos, etc., “a menos que usted pretenda volverse un especialista en teoría de aproximación de funciones especiales. El tema debe reducirse a su esencia: entender cómo construir una solución con series de potencias y conocer funciones especiales como las de Bessel y las de Legendre.” Es importante anotar que no se trata de minimizar la importancia del tema. “La solución con series de potencias nos da una amplia perspectiva sobre cuál es la noción de la solución de una EDO.”

Los contenidos propuestos para el tema del operador de Laplace se pueden tratar en dos semanas, y lo básico del tema de series en una semana.

## 5. BIBLIOGRAFÍA

Boelkins-Goldberg-Potter. Differential Equations With Linear Algebra. Oxford University Press- 2009

David G. Schaeffer - John W. Cain. Ordinary Differential Equations: Basics and Beyond. Springer Science - Business Media. New York. 2016.

David A. Sánchez. Ordinary Differential Equations. A Brief Eclectic Tour. The Mathematical Association of America.

Henry Ricardo. A Modern Introduction to Differential Equations. 2<sup>nd</sup> edition. Elsevier Academic Press.

James C. Robinson. An Introduction to Ordinary Differential Equations. Cambridge.

John J. Craig. Introduction to Robotics. Addison-Wesley.

M. Braun. Differential Equations and their Applications. Springer - Verlag



Paul Blanchard, Robert Devaney, Glen Hall. Differential Equations. Third edition. Thomson Brooks-Cole.

Richard H. Enns. It's a Nonlinear World. Springer Science+Business Media, LLC 2011

Robert L. Devaney. Boston University. Mastering Differential Equations. The Visual Method. 24 lecciones en video. The Great Courses.

Robert M. May, Nature, Vol. 261, 459 (1976), citado abreviadamente por Richard H. Enns.

## 6. EVALUACIÓN

La evaluación final será unificada y contendrá todos los temas que se describieron en el contenido y tiene una valoración del 30% de la nota del curso. Anexo a este documento, se encuentran algunas preguntas que se pueden usar como modelo para las evaluaciones, o para las tareas, que evalúan las competencias propuestas en cada unidad de contenido.

EVALUACIÓN	PORCENTAJE		
Evaluación I <b>Recuerde:</b> Por reglamento el 30% de la nota del curso debe estar registrada en la plataforma a más tardar el primer día de la semana 8ª.	Opción I	Examen I	15 %
		Examen II	15 %
	Opción II	Examen I	10 %
		Examen II	20 %
	Opción III	Un sólo examen	30%
Evaluación II	20%		
Evaluación III	20%		
<b>Examen final</b> <b>Recuerde:</b> Es el 30% porque el examen es unificado.	30%		

### Observaciones, se sugiere que:

- Las evaluaciones contengan ejercicios que permitan por lo menos evaluar el desempeño: algorítmico, argumentativo y demostrativo (Preguntas de falso y verdadero), modelación (contextualización de los conceptos).
- Todos los exámenes que se hagan deben ser **enviados por lo menos con una semana de anterioridad a la fecha de realización del mismo**, al coordinador del curso, esto

con el fin de unificar criterios de evaluación y analizar aspectos relacionados con los procesos de enseñanza y aprendizaje.

- Las actividades extra curriculares que se asignen como talleres o tareas, deben ser sustentadas por los estudiantes, si las mismas son tenidas en cuenta como parte de la evaluación.
- La valoración del examen final únicamente es la que el alumno obtenga en su examen, **no incluye décimas** por talleres o similares.