Método de integración fracciones parciales

Fracciones parciales

Sea la integral de la forma $\int \frac{p(x^n)}{Q(x^m)}\,\mathbf{dx}$

Entonces se cumple lo siguiente:

1) n≥m la fracción es impropia se realiza división de polinomios

2) Si n<m la fracción es propia

Primer caso fracción impropia

Ej: calcular $\int \frac{8x^2+18x-2}{4x-1}\,dx$

Miramos que n>m(2 > 1) en este caso realizamos división de polinomios, dividimos el numerador entre el denominador.

$$
\begin{array}{r|l}
\overset{D}{8x^2+18x-2} & \overset{d}{4x-1} \\ \hline
-8x^2+2x \quad\quad & \underset{C}{2x+5} \\ \hline
20x-2 & \\
-20x+5 & \\ \hline
\underset{r}{3} &
\end{array}
$$

Por propiedad sabemos

$$\frac{D}{d} = C + \frac{r}{d}$$

Entonces devolviéndonos a la integral tendríamos

$$\int \frac{D}{d}\,\mathrm{dx} = \int C + \frac{r}{d}\,\mathrm{dx}$$

Sustituyendo tendríamos

Sabemos que $\int Ax + Bx + Cx \ldots \mathrm{dx}$
Como esta sumando podemos
Separar integrales esto seria igual
a $\int Ax\,\mathrm{dx} + \int Bx\,\mathrm{dx} + \int Cx\,\mathrm{dx} \ldots\ldots$

$$\int \frac{8x^2 + 18x - 2}{4x - 1}\,\mathrm{dx} = \int 2x + 5 + \frac{3}{4x - 1}\,\mathrm{dx}$$

$$= \int 2x\,\mathrm{dx} + \int 5\,\mathrm{dx} + \int \frac{3}{4x - 1}\,\mathrm{dx}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Si al derivar el denominador nos da el numerador
El resultado será el logaritmo natural de lo que se
derivo; $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = \ln(x)$

$$= \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} + 5x + \frac{3ln(4x - 1)}{4}$$

$$= x^2 \quad 5x + \frac{3\ln(4x - 1)}{4}$$

fracciones propias (se pueden presentar tres tipos de problemas)

Ej: calcular $\int \frac{3x+1}{x^2+4x+3}dx$

Son fracciones propias cuando n < m, como podemos ver en este ejercicio 1 < 2. En este caso factorizamos el denominador

$$x^2+4x+3 = (x+3)(x+1)$$

Estos se los conoce como puntos críticos, cada punto critico se le asigna una, letra la cual será su dividendo, la integral nos quedaría.

$$\int \frac{3x+1}{(x+3)(x+1)}dx = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x+1)}$$

Dividimos todo por el denominador

$$\int \frac{3x+1\cancel{(x+3)}\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+3)}\cancel{(x+1)}}dx = \frac{A\cancel{(x+3)}(x+1)}{\cancel{(x+3)}} + \frac{B(x+3)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}}$$

$$3x+1 = A(x+1) + B(x+3)$$

$3x + 1 = A(x+1) + B(x+3)$ aplicamos propiedad distributiva

$3x + 1 = Ax + A + Bx + 3B$ Sacamos los coeficientes que acompañan a x de lado y lado, y el termino independiente.

$$\left.\begin{aligned} 3 &= A + B \\ 1 &= A + 3B \end{aligned}\right\}$$

Obtenemos un sistema de ecuaciones dos por dos lo resolvemos para hallar el valor de A y B.

Utilizando método de reducción quedaría.

$$\begin{aligned} -3 &= \cancel{-A} - B \\ 1 &= \cancel{A} + 3B \\ \hline -2 &= 2B \end{aligned}$$

$$B = -\frac{2}{2} = -1$$

$$3 = A + B$$

$$3 = A + (-1)$$

$$3 = A - 1$$

$$A = 3 + 1 = 4$$

Sustituimos el valor de b en cualquiera de las dos ecuaciones originales

Sabiendo los valores de A y B nos devolvemos ala integral y sustituimos los valores

A= 4, B= -1

$$\int \frac{3x+1}{(x+3)(x+1)}dx = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x+1)}$$

$$\int \frac{3x+1}{(x+3)(x+1)}dx = \frac{4}{(x+3)} + \frac{-1}{(x+1)} = \frac{4}{(x+3)} - \frac{1}{(x+1)}$$

$$= \int \frac{4}{(x+3)}dx - \int \frac{1}{(x+1)}dx$$

$$= 4Ln(x+3) - Ln(x+1)$$

Segundo caso

Ej: calcular $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+16}{2x^3-3x^2+1}dx$

Igual factorizamos el denominador utilizando división sintética.

2	-3	0	1	1
	2	-1	-1	
2	-1	-1		1
	2	1		
2	1			

$$\Rightarrow (2x+1)(x-1)^2$$

$$\int \frac{x^2-5x+16}{(2x+1)(x-1)^2}dx = \frac{A}{(2x+1)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\frac{(x^2-5x+16)\cancel{(2x+1)}\cancel{(x-1)^2}}{\cancel{(2x+1)}\cancel{(x-1)^2}} = \frac{A\cancel{(2x+1)}(x-1)^2}{\cancel{(2x+1)}} + \frac{B(2x+1)(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-1)}} + \frac{C(2x+1)\cancel{(x-1)^2}}{\cancel{(x-1)^2}}$$

……..nos quedaría

$$x^2 - 5x + 16 \;= A(x-1)^2 + B(2x+1)(x-1) + C(2x+1)$$

$$x^2 - 5x + 16 \;= A(x^2 - 2x + 1) + B(2x^2 - 2x + x - 1) + 2Cx + C$$

$$x^2 - 5x + 16 \;= Ax^2 - 2Ax + A + B(2x^2 - x - 1) + 2Cx + C$$

$$x^2 - 5x + 16 \;= Ax^2 - 2Ax + A + 2Bx^2 - Bx - B + 2Cx + C$$

$$\begin{cases} 1 = A + 2B \\ -5 = -2A - B + 2C \\ 16 = A - B + C \end{cases}$$

Obtenemos un sistema de ecuaciones tres por tres el cual desarrollamos para obtener los valores de A,B y C.

$$\begin{cases} 1 = A + 2B & (1) \\ -5 = -2A - B + 2C & (2) \\ 16 = A - B + C & (3) \end{cases}$$

Se podría utilizar el método de gauss Jordán pero en este caso lo are por sustitución

- Enumeramos las ecuaciones, de la primera ecuación despejamos a A

$$\boxed{A = 1 - 2B}$$

- Obtenido el valor de sustituimos el valor de A en las ecuaciones 2 y tres

$$-5 = -2(1 - 2B) - B + 2C$$
$$\Downarrow$$
$$-5 = -2 + 4B - B + 2C$$
$$\Downarrow$$
$$-5 + 2 = 3B + 2C$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{-3 = 3B + 2C} \quad (4)$$

$$16 = (1 - 2B) - B + C$$
$$\Downarrow$$
$$16 = 1 - 2B - B + C$$
$$\Downarrow$$
$$16 - 1 = -3B + C$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{15 = -3B + C} \quad (5)$$

Obtenemos 2 nuevas ecuaciones

$$\begin{cases} 15 = -3B + C & (5) \\ -3 = 3B + 2C & (4) \end{cases}$$

Obtenemos un sistema ecuaciones dos por dos con
Las ecuaciones 4 y 5

$$15 = -3B + C$$
$$-3 = 3B + 2C$$

$$\begin{array}{r} 15 = -\cancel{3B} + C \\ -3 = \cancel{3B} + 2C \\ \hline 12 = 3C \end{array} \Rightarrow C = \frac{12}{3} \Rightarrow C = 4$$

❖ Sustituimos el valor de C en la cuarta ecuación

$$-3 = 3B + 2(4) \Rightarrow -3 = 3B + 8 \Rightarrow 3B = -3 - 8 \Rightarrow B = \frac{-3-8}{3} \Rightarrow B = -\frac{11}{3}$$

❖ Como sabemos que A = 1 – 2B sustituimos el valor de B

$$A = 1 - 2B \Rightarrow A = 1 - 2\left(-\frac{11}{3}\right) \Rightarrow A = 1 + \frac{22}{3} \Rightarrow A = \frac{3+22}{3} \Rightarrow A = \frac{25}{3}$$

Obtenido los valores de A, B y C nos regresamos a la integral

U = 2X +1

dU = 2dx

dx = $\frac{dU}{2}$

$$\int \frac{x^2-5x+16}{(2x+1)(x-1)^2}dx = \frac{A}{(2x+1)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\int \frac{x^2-5x+16}{(2x+1)(x-1)^2}dx = \int \frac{\frac{25}{3}}{(2x+1)}dx + \int \frac{-\frac{11}{3}}{(x-1)}dx + \int \frac{4}{(x-1)^2}dx$$

$$= \frac{25}{3}\int \frac{1}{(2x+1)}dx - \frac{11}{3}\int \frac{1}{(x-1)}dx + 4\int \frac{1}{(u)^2}dx$$

$$= \frac{25}{3} \times \frac{1}{2}\mathrm{Ln(U)} - \frac{11}{3}\mathrm{Ln(x-1)} - \frac{4}{U}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{25}{6}\mathrm{Ln(2x+1)} - \frac{11}{3}\mathrm{Ln(x-1)} - \frac{4}{x-1}$$

Tercer caso

$si\ tenemos: \dfrac{Qn(x)}{Pm\ (x)}$ ⇨ Si $Pm\ (x)$ es indivisible (raíces complejas) ⇨ Su termino es Ax + B

Ej: $sea\ la\ integral$ $\displaystyle\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$

$$\frac{(2x^2+3)\cancel{(x^2+1)^2}}{\cancel{(x^2+1)^2}} = \frac{(Ax+B)(x^2+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x^2+1)}} + \frac{(Cx+D)\cancel{(x^2+1)^2}}{\cancel{(x^2+1)^2}}$$

$$2x^2+3 = (Ax+B)(x^2+1) + Cx + D$$

$$2x^2+3 = Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx + D$$

$$\begin{cases} 0 = A \\ 2 = B \\ 0 = A + C \\ 3 = B + D \end{cases}$$

$0 = A$
$2 = B$
$0 = A + C$
$3 = B + D$

a partir de lo obtenido concluimos

$A = 0$

$B = 2$

$C = -A = 0$

$3 = 2 + D \Rightarrow D = 3 - 2 = 1$

- Obtuvimos:

$A = 0$
$B = 2$
$C = 0$
$D = 1$

……. Sabiendo los valores de A, B, C y D volvemos a la integral y remplazamos.

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

Podemos separar

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx = \frac{Ax}{(x^2+1)} + \frac{B}{(x^2+1)} + \frac{Cx}{(x^2+1)^2} + \frac{D}{(x^2+1)^2}$$

$$= \int \frac{Ax}{x^2+1}dx + \int \frac{B}{x^2+1}dx + \int \frac{Cx}{(x^2+1)^2}dx + \int \frac{D}{(x^2+1)^2}dx$$

$$= \cancel{\int \frac{0x}{x^2+1}dx} + \int \frac{2}{x^2+1}dx + \cancel{\int \frac{0x}{(x^2+1)^2}dx} + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$

$$x^2 + a = x = a\tan\theta$$

$$x = 1\tan\theta$$

$$dx = (\sec\theta)^2 d\theta$$

.... Nos quedaría

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{\mathbf{2}}{x^2+1}\,dx + \int \frac{dx}{(\underset{x}{x}^2 + \underset{a}{1})^2}$$

$$= 2\tan^{-1}x + \int \frac{(\sec\theta)^2 d\theta}{((\tan\theta)^2+1)^2}$$

$$= 2\tan^{-1}x + \int \frac{\cancel{(\sec\theta)^2} d\theta}{((\sec\theta)^2)^{\cancel{2}}}$$

$$= 2\tan^{-1}x + \int \frac{d\theta}{(\sec\theta)^2}$$

$$= 2\tan^{-1}x + \int (\cos\theta)^2 d\theta$$

Por identidad

$$(\sec\theta)^2 = (\tan\theta)^2 + 1)$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

....

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx = 2\tan^{-1}x + \int (\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= 2\tan^{-1}x + \int \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= 2\tan^{-1}x + \int \frac{1}{2} d\theta + \int \frac{\cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= 2\tan^{-1}x + \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 2\theta \, d\theta$$

$$= 2\tan^{-1}x + \frac{\tan^{-1}x}{2} + \frac{1}{2}\times\left(\frac{-\sin 2\theta}{2}\right)$$

$$= 2\tan^{-1}x + \frac{\tan^{-1}x}{2} - \frac{\frac{\cancel{2}x}{x^2+1}}{\cancel{4}}$$

$$1$$

$$= \frac{5\tan^{-1}x}{2} - \frac{x}{2(x^2+1)}$$

Por ángulos dobles sabemos

$$(\cos\theta)^2 = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$x = 1\tan\theta$$

$$\theta = \tan^{-1}x$$