GUÍA PARA LA ESTIMACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE EN LAS MEDICIONES

(INGENIERÍAS Y TECNOLOGÍAS)

Universidad Tecnológica de Pereira

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

Índice general

Estimación de la incertidumbre 1

Para medidas directas

1.1. Objetivo

Proporcionar una guía paso a paso para la estimación de la incertidumbre en las mediciones directas.

1.2. Descripción

Aclaración: Este capítulo presenta una guía para la estimación de la incertidumbre en mediciones directas. No incluye deducciones matemáticas ni desarrollos teóricos de las ecuaciones utilizadas; estos pueden consultarse en el material bibliográfico referenciado.

Definición de medida directa: Una medida directa es aquella en la que el valor del mensurando se obtiene a partir de una única indicación del instrumento, bajo un procedimiento de medida que no requiere transformaciones funcionales de otras magnitudes [1].

1.3. Procedimiento

1. **Identificar el sistema de medición.**

   El sistema de medición está compuesto por la variable a medir, el instrumento de medición, el operario, las condiciones ambientales y cualquier otro parámetro que pueda influir en la medición.

   Por lo que se debe identificar la variable a medir y el instrumento que se usará para dicha medición con su respectiva unidad, registrar los datos de temperatura y humedad relativa.

2. **Toma de datos.**

   Realice la toma de datos siguiendo el procedimiento indicado en la guía del laboratorio.

3. **Modelación de la incertidumbre.**

   Para estimar la incertidumbre de una medición es necesario modelar matemáticamente las fuentes de error involucradas. Se construye una ecuación de corrección y, a partir de ella, a cada fuente de error se le asocia un aporte a la incertidumbre de la medición.

   $$E = A_i - A_r \tag{1.1}$$

   Siendo, E el error de la medida, A_i los datos tomados y A_r el valor de referencia o convencionalmente verdadero.

   Los errores en la medición se pueden clasificar en dos grandes grupos: **sistemáticos**, son todos los que se pueden identificar y en algunos casos llegar a corregir, estos pueden provenir del método de toma de datos, el operario, defectos del sistema de medición o fallas en el instrumento de medida que se pueden evidenciar en los certificados de calibración; los errores **aleatorios**, son aquellos que no se pueden identificar previamente como variaciones en la estabilidad del instrumento, errores de repetibilidad, y no se pueden corregir.

   Así se puede remodelar el error de la medida de la siguiente manera.

   $$E = (E_d + E_r + E_e + E_a) - A_r \tag{1.2}$$

   Siendo, E_d el error del sistema de medición que se manifiesta como variaciones en la variable física, E_r los errores por aproximaciones en la resolución ya que se debe aplicar la regla de redondeo, dado que los valores de las mediciones siempre deben ser múltiplos enteros de la resolución del instrumento, E_e errores por especificaciones del instrumento de medida, lo que comúnmente se llama error máximo permitido o tolerancia del instrumento de medida, E_a errores que se pueden presentar por variaciones en las condiciones ambientales, humedad relativa, temperatura presión atmosférica.

   A los errores que no se pueden corregir se les asocia un aporte directo a la incertidumbre de la medida; de esta manera se pueden encontrar modelos matemáticos que permitan hacer una estimación de incertidumbre.

   $$E_d \to \delta_d$$

   $$E_r \to \delta_r$$

   $$E_e \to \delta_e$$

   Ahora δ_d representa la incertidumbre asociada a los datos tomados, δ_r corresponde a la incertidumbre asociada al redondeo por resolución y δ_e corresponde a la incertidumbre asociada a las especificaciones del instrumento de medida, error máximo permitido EMP [2].

4. **Estimación de los aportes a la incertidumbre.**

   Una vez se tiene el modelo matemático de los aportes a la incertidumbre se deben encontrar los valores numéricos.

   4.1 Aporte a la incertidumbre debido a los datos δ_d.

Este aporte corresponde a la dispersión de los datos y se estima como el cociente entre la desviación estándar (s) de los datos tomados y la raíz cuadrada del número de veces que se tomó el dato n [3].

$$\delta_d = \frac{s}{\sqrt{n}} \tag{1.3}$$

Donde s se puede obtener como:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{1.4}$$

Si la medición no contempla mediciones repetidas en un mismo punto este aporte tendrá una dispersión de cero "0".

4.2 Aporte a la incertidumbre debido a la resolución δ_r.

Los aportes a la incertidumbre por redondeo se deben analizar según la naturaleza del instrumento de medida. Si el instrumento es digital el redondeo se hace según el algoritmo interno y el operario no interviene, lo que garantiza la misma regla de decisión en todos los casos, por lo que se toma la mitad del aporte a la incertidumbre como se muestra en la ecuación (1.5), si el instrumento es analógico no hay garantía de aplicar siempre el mismo criterio ya que el operario es quien hace la interpretación, en este caso se debe tomar el aporte completo ecuación (1.6) .

$$\delta_r = \frac{r}{2\sqrt{3}} \tag{1.5}$$

$$\delta_r = \frac{r}{\sqrt{3}} \tag{1.6}$$

4.3 Aporte a la incertidumbre debido a las especificaciones del instrumento δ_e.

El aporte a la incertidumbre por especificaciones del instrumento de medición corresponde al Error Máximo Permitido EMP, a este se le conoce como tolerancia, error instrumental, error, exactitud del instrumento o desviación, viene marcado en el instrumento o en la ficha técnica, se estima como el error máximo permitido dividido entre raíz de tres como se muestra en la ecuación (1.7).

$$\delta_e = \frac{EMP}{\sqrt{3}} \tag{1.7}$$

Para calcular el EMP se debe tener en cuenta la naturaleza del instrumento ya que no hay un criterio unificado para expresarlo.

- Si este es analógico puede que el fabricante lo exprese como una clase de exactitud, si es así el instrumento traerá un número de clase sin unidades, este número corresponde a un porcentaje del rango de medida utilizado.

$$EMP = \frac{clase \cdot rango}{100} \tag{1.8}$$

El fabricante puede indicar este error directo como una cantidad numérica con su respectiva unidad, en este caso no se debe hacer ningún cálculo y el EMP es que indique el instrumento.

- Si es un instrumento digital se debe ubicar en el manual de operación las especificaciones para cada rango de medición, a continuación, se muestra una forma genérica de estimar este error con los parámetros que pueden presentar los fabricantes, no quiere decir que los presenten todos, los que no se encuentren serán cero para la ecuación (1.9).

$$EMP = \frac{X \cdot L + Y \cdot rango}{100} + N \cdot R + C \tag{1.9}$$

Donde, X representa un porcentaje de error en la medida, que se debe multiplicar por la medida L, Y representa un porcentaje de error en el rango que se debe multiplicar por el rango de medida utilizado $rango$, N corresponde a errores en las cuentas del instrumento, este número es adimensional por lo que se debe multiplicar por la resolución R para representar el error, finalmente el fabricante puede expresar un error directo con un valor numérico C y su respectiva unidad [3–7].

5. **Estimación de la incertidumbre combinada U_c.**

La incertidumbre combinada no es más que la suma adecuada de los aportes a la incertidumbre, esta suma se hace por medio de la ley de propagación de los errores asumiendo que los factores de sensibilidad son uno, y no hay correlación ya que se está trabajando con una sola variable como se muestra en la ecuación (1.10) [8].

$$U_c = \sqrt{\delta_d^2 + \delta_r^2 + \delta_e^2} \tag{1.10}$$

6. **Estimación de la incertidumbre expandida U_{xp}.**

La incertidumbre combinada ya es una buena representación de la dispersión de la medición, más aún es necesario hacer una expansión de ésta para tener un margen de seguridad, a lo que se llama incertidumbre expandida como se muestra en la ecuación (1.11).

$$U_{ex} = K \cdot U_c \tag{1.11}$$

Para este caso se trabajara con un K para un factor de confianza del 95 % utilizando la tabla de distribución de T-Student [8].

Para elegir el valor de K es necesario saber los grados efectivos de libertad de la incertidumbre estimada, para esto se usara la fórmula de Welch-Satterthwaite ecuación (1.12).

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{u_c^4}{\sum \frac{\delta_d^4}{\nu}} \tag{1.12}$$

Es de anotar que la ecuación ya está simplificada para el caso de incertidumbres de mediciones directas, siendo ν_{eff} los grados efectivos de libertad, U_c la incertidumbre combinada estimada en el paso 5 con la ecuación (1.10), δ_d el aporte a la incertidumbre de los datos de medida estimada con la ecuación (1.3) y ν los grados de libertad de dicho aporte que se calculan como la cantidad de veces que se repitió la medición menos uno [3].

Interpretación, si $\nu_{\text{eff}} > 120$ se dirá que los grados efectivos de libertad del sistema tiende al infinito y se elegirá el valor para K más pequeño que tiene la tabla de T-Student tabla 1 [9]: $K = 1.960$, si da un valor menor, entonces se elige el valor de K según la tabla [6]; si el valor no coincide con alguno de la tabla se deberá interpolar para encontrar un valor de K lo más exacto posible.

Tabla 1.1: Valores del factor de cobertura k según v_{eff}

v_{eff}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K	12.706	4.303	3.182	2.776	2.571	2.447	2.365	2.306	2.262	2.228
v_{eff}	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
K	2.201	2.179	2.160	2.145	2.131	2.120	2.110	2.101	2.093	2.086
v_{eff}	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
K	2.080	2.074	2.069	2.064	2.060	2.056	2.052	2.048	2.045	2.042
v_{eff}	40	60	120	∞						
K	2.021	2.000	1.980	1.960						

7. **Presentación final de la medida.**

Una vez estimada la incertidumbre expandida se puede presentar la medición tomada con su respectiva incertidumbre.

$$medida = mensurando \pm U_{ex} \tag{1.13}$$

Recuerde, ninguna medición está completa hasta que no se exprese con su respectiva incertidumbre.

1.4. Ejemplo 1, medición con instrumento analógico

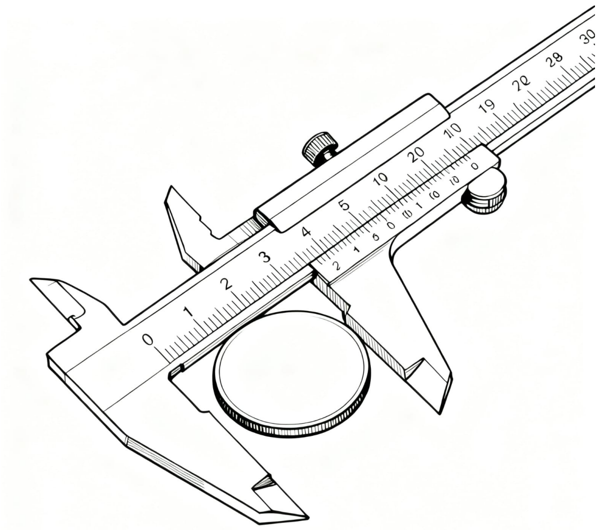

Figura 1.1: Medición de pequeñas longitudes con Calibrador Vernier analógico

1.5. Medición del diámetro de una moneda de 500

Para medir el diámetro de una moneda de 500 pesos colombianos (nueva familia), se utilizó un calibrador vernier analógico con las siguientes especificaciones metrológicas:

Rango de medida:	0.00 mm a 250.00 mm
Resolución:	0.01 mm
Clase de exactitud:	0.02

Procedimiento experimental: Se verificó que, al cerrar completamente el calibrador pie de rey, la línea del cero del nonio coincidiera con la línea del cero de la regla fija. Posteriormente, se ubicó la moneda entre las mordazas, se ajustó el nonio y se tomó la lectura. Este proceso se repitió cinco veces, verificando el cero del instrumento entre cada medición. Los datos obtenidos se presentan a continuación:

Medida:	1	2	3	4	5
Dato [mm]:	23.78	23.80	23.78	23.81	23.77

Para presentar el resultado, se calculó el promedio de las cinco lecturas:

$$\bar{D} = 23.79 \text{ mm}$$

Sin embargo, la medición no está completa sin su incertidumbre asociada. Según el procedimiento, se identificaron los aportes correspondientes a la dispersión de los datos, la resolución y las especificaciones del instrumento.

Incertidumbre asociada a los datos (u_d)

Utilizando la ecuación (1.3), se estima la incertidumbre por dispersión como la desviación estándar de la muestra (1.4) dividida por la raíz del número de datos:

$$s = 0.016431677 \text{ mm}$$

$$u_d = 0.007348469 \text{ mm}$$

Incertidumbre asociada a la resolución (u_r)

Dado que se trata de un instrumento analógico, la incertidumbre por resolución se estima mediante la ecuación (1.6), dividiendo la resolución por $\sqrt{3}$:

$$u_r = 0.005773503 \text{ mm}$$

Incertidumbre asociada a las especificaciones (EMP) (u_e)

Se estima mediante la ecuación (1.7), la cual corresponde al Error Máximo Permitido (EMP) dividido por $\sqrt{3}$. Para un instrumento analógico donde el fabricante especifica la clase de exactitud, el EMP se calcula con la ecuación (1.8).

En este caso, con una clase de exactitud de 0.01 (referida al porcentaje del rango de medición):

$$EMP = 0.05 \text{ mm}$$

$$u_e = 0.028867513 \text{ mm}$$

Incertidumbre combinada (u_c)

Los aportes se asocian mediante la ecuación (1.10), que corresponde a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de cada aporte individual:

$$u_c = 0.030342489 \text{ mm}$$

Incertidumbre expandida (U)

Para la presentación final, se calcularon los grados efectivos de libertad con la ecuación (1.12):

$$\nu_{eff} = 1162.73$$

Al ser $\nu_{eff} > 120$, se asume un valor infinito. De la tabla 1.1, se obtiene un factor de cobertura para un nivel de confianza del 95 % de:

$$k = 1.960$$

Por lo tanto, la incertidumbre expandida (1.11) es:

$$U = k \cdot u_c = 0.059471279 \text{ mm}$$

Presentación de la medida

El resultado final del mensurando (diámetro D) se expresa con su respectiva incertidumbre expandida:

$$\text{Diámetro} = (23.79 \pm 0.06) \text{ mm}$$

Es importante señalar que los valores intermedios no fueron redondeados para minimizar la acumulación de errores numéricos, aplicando el redondeo únicamente a la expresión final conforme a la resolución del instrumento.

1.6. Ejemplo 2, medición instrumento digital

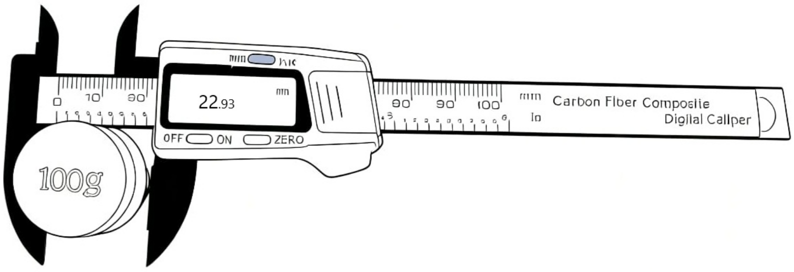

Figura 1.2: Medición de pequeñas longitudes con Calibrador Vernier digital

1.7. Medición del diámetro de una masa patrón cilíndrica

Para medir el diámetro de una masa patrón de forma cilíndrica, se utilizó un calibrador pie de rey digital con las siguientes características metrológicas:

Rango de medida:	0.00 mm a 100.00 mm
Resolución:	0.01 mm
Exactitud:	0.02 mm

Procedimiento experimental: Se cerró completamente el calibrador y se presionó el botón de "cero" para inicializar la medición. Posteriormente, se ubicó la masa patrón entre las mordazas, se ajustó el instrumento y se tomó la lectura. Este proceso se repitió cinco veces, retirando la pieza y verificando el cero del instrumento en cada intervalo. Los datos obtenidos se presentan a continuación:

Medida:	1	2	3	4	5
Dato [mm]:	22.93	22.93	22.93	22.93	22.93

Nótese que, al tratarse de un instrumento digital, las lecturas presentan el mismo valor de forma sistemática. Esto ocurre porque el instrumento aplica internamente una regla de redondeo constante sobre la señal electrónica, eliminando la variabilidad de apreciación del operario y mejorando la repetibilidad aparente.

La medida corresponde al promedio de los datos tomados, que en este caso coincide con cualquiera de las mediciones individuales:

$$\bar{D} = 22.93 \text{ mm}$$

Sin embargo, el resultado de la medición no se considera completo hasta que se reporte con su respectiva incertidumbre asociada. A continuación, se estiman los aportes por dispersión de datos, resolución y error máximo permitido (EMP).

Incertidumbre asociada a los datos (u_d)

Utilizando la ecuación (1.3), se observa que este aporte es nulo debido a que la dispersión de las lecturas es cero:

$$s = 0.00 \text{ mm} \quad \Rightarrow \quad u_d = 0.00 \text{ mm}$$

Incertidumbre asociada a la resolución (u_r)

Para un instrumento digital, la incertidumbre por resolución se estima mediante la ecuación (1.5), dividiendo la resolución entre $2\sqrt{3}$:

$$u_r = 0.002886751 \text{ mm}$$

Incertidumbre asociada a las especificaciones (EMP) (u_e)

Se utiliza la ecuación (1.7), la cual corresponde al EMP dividido por $\sqrt{3}$. Dado que el fabricante expresa el EMP como un valor directo, los términos dependientes de la escala en la ecuación (1.9) se anulan, tomando C como el EMP directamente:

$$EMP = 0.02 \text{ mm}$$

$$u_e = 0.011547005 \text{ mm}$$

Incertidumbre combinada (u_c)

Combinando los aportes mediante la ecuación (1.10), se obtiene:

$$u_c = 0.011902381 \text{ mm}$$

Incertidumbre expandida (U)

Para determinar el factor de cobertura k, se calculan los grados efectivos de libertad con la ecuación (1.12):

$$\nu_{eff} \to \infty$$

Dado que el aporte por dispersión de datos es cero, el denominador de la ecuación de Welch-Satterthwaite tiende a cero, llevando los grados efectivos al infinito. De la tabla de distribución t-Student 1.1, se toma para un nivel de confianza del 95 %:

$$k = 1.960$$

Calculando la incertidumbre expandida con la ecuación (1.11):

$$U = k \cdot u_c = 0.02332866 \text{ mm}$$

Presentación de la medida

El resultado final del diámetro se expresa como el valor central acompañado de su incertidumbre expandida, redondeada según la resolución del instrumento:

$$\text{Diámetro} = (22.93 \pm 0.02)\ \text{mm}$$

Se recuerda que el valor de la incertidumbre reportada debe ser coherente con la resolución del equipo, ya que un número excesivo de decimales no tendría significado físico comparable con la precisión del instrumento utilizado.

Estimación de la incertidumbre 2

Para medidas indirectas

2.1. Objetivo

Proporcionar una guía paso a paso para la estimación de la incertidumbre en mediciones indirectas.

2.2. Descripción

Aclaración: Este capítulo presenta una guía para la estimación de la incertidumbre en mediciones indirectas. No incluye deducciones matemáticas ni desarrollos teóricos de las ecuaciones utilizadas; estos pueden consultarse en el material bibliográfico referenciado.

Definición de medida indirecta: Una medida indirecta se define mediante un modelo de medición, el cual establece una relación matemática entre las magnitudes de entrada obtenidas de diversas indicaciones y la magnitud de salida que representa el mensurando final [1].

2.3. Procedimiento

Una medición indirecta se puede obtener de dos maneras.

Mediciones repetidas: Se toma la medida en un mismo punto varias veces, con estos datos se opera matemáticamente para obtener el valor final cuya una unidad será combinación de las unidades de las variables de entrada.

Serie de mediciones: Se toma una serie de medidas que permitan mapear la variable en diferentes puntos para posteriormente construir un gráfico, obtener la ecuación de la línea de tendencia y de esta hallar el valor del mensurando de manera indirecta, la unidad será una combinación de las unidades de las variables de entrada.

En ambos procedimientos la medida final estará dada por una relación matemática que opera las variables de entrada y regresa un valor final con la unidad combinada.

1. **Identificar la relación matemática**

   La magnitud a medir se deberá modelar matemáticamente hasta llegar a la función final que dependerá de las variables de entrada.

$$Y = f(x_{1,2}, x_3, ..., x_n) \tag{2.1}$$

   Donde A, B, C son variables físicas que se han medido de forma directa [10].

2. **Aportes a la incertidumbre**

   Cada un de las variables que se miden directamente y que hagan parte de la relación matemática, se convierten en un aporte directo a la incertidumbre, por lo que es necesario encontrar sus incertidumbres combinadas utilizando el procedimiento "Estimación de la incertidumbre 1. Para medidas directa" descrito en el primer capitulo de esta guía.

   Para lo que es necesario desarrollar la ecuación (1.10), encontrando todos sus parámetros.

3. **Incertidumbre combinada total**

   Después de encontrar la incertidumbre combinada de las variables de entrada se debe calcular la incertidumbre combinada total, esta se hace por medio de la ley de propagación del error ecuación (2.2) para variables independientes entre si, no interrelacionadas.

$$u_{c(Y)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (C_i)^2 \cdot u^2(x_i)} \tag{2.2}$$

   Siendo C_i los coeficientes de sensibilidad para para las variables de entrada, el cálculo de estos coeficientes se hace mediante las derivadas parciales de la función que describe el fenómeno de interés como se muestra en la ecuación [11].

$$C_i = \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} \tag{2.3}$$

   Es posible obtener ecuaciones generales para la incertidumbre combinada total mediante la determinación de los factores de sensibilidad y su operación dentro del radical; esto permite reducir la expresión a fórmulas de consulta que dependen de la forma de la ecuación que modela el fenómeno [12].

   - **Caso 1: Suma y resta**

     Si la medida final se obtiene mediante la suma de las mediciones de entrada como una longitud medida por tramos con instrumentos de diferente resolución, la suma de masas tomadas con distintas balanzas o cualquier otro caso que requiera sumar o restar las medidas, la función estará dada por la ecuación (2.4).

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \cdots \pm x_n \tag{2.4}$$

Al calcular la derivada parcial de la función (2.4) respecto a cada variable x_i como se muestra en la ecuación (2.3), sustituyéndolas en la ecuación (2.2) y realizando el álgebra correspondiente, se obtiene la ecuación (2.5) que corresponde a la incertidumbre combinada de la medición final.

$$u_{c(Y)} = \sqrt{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + u_{x_3}^2 + \cdots + u_{x_n}^2} \tag{2.5}$$

Se invita al lector a realizar las operaciones indicadas para llegar al resultado. Nótese que la ecuación final corresponde a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las incertidumbres estándar combinadas de cada variable de entrada.

- **Caso 2: Multiplicación**

  Si la medida final se obtiene mediante el producto de las mediciones de entrada como el cálculo del área de un rectángulo a partir de sus lados, el volumen de un cubo mediante su largo, ancho y alto, o el trabajo resultante de una fuerza aplicada por una distancia desplazada, la función estará dada por la ecuación (2.6).

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \tag{2.6}$$

  Al calcular la derivada parcial de la función (2.6) respecto a cada variable x_i, como se indica en (2.3), y sustituirlas en la ecuación de incertidumbre combinada (2.2), se obtiene la ecuación (2.7) tras realizar el álgebra correspondiente.

$$u_{c(Y)} = \sqrt{x_2^2 \cdot x_3^2 \cdot u_{x_1}^2 + x_1^2 \cdot x_3^2 \cdot u_{x_2}^2 + x_1 \cdot x_2^2 \cdot u_{x_3}^2} \tag{2.7}$$

  Se invita al lector a realizar las operaciones indicadas para verificar el resultado. Nótese que la expresión final representa la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los productos entre las derivadas parciales (coeficientes de sensibilidad) y las incertidumbres estándar combinadas de cada variable de entrada.

- **Caso 3: División**

  Si la medida final se obtiene mediante el cociente de las mediciones de entrada como el cálculo de la velocidad de un cuerpo al dividir la distancia recorrida entre el tiempo transcurrido, o la determinación de la densidad al dividir la masa entre el volumen, la función estará dada por la ecuación (2.8).

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2} \tag{2.8}$$

  Al calcular la derivada parcial de la función (2.8) respecto a cada variable x_i, como se indica en (2.3), y sustituirlas en la ecuación de incertidumbre combinada (2.2), se obtiene la ecuación (2.9) tras realizar el álgebra correspondiente.

$$u_{c(Y)} = \sqrt{\left(\frac{1}{x_2}\right)^2 u_{x_1}^2 + \left(\frac{-x_1}{x_2^2}\right)^2 u_{x_2}^2} \tag{2.9}$$

Se invita al lector a realizar las operaciones indicadas para verificar el resultado. Nótese que la expresión final representa la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los productos entre los coeficientes de sensibilidad y las incertidumbres estándar de cada variable de entrada.

- **Caso 4: Producto de variables con exponentes**

  Este caso generaliza los casos 2 y 3. Se aplica cuando la medida final se obtiene mediante el producto de variables elevadas a exponentes reales (n), los cuales pueden ser iguales o diferentes para cada una, como se muestra en la ecuación (2.10).

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^a \cdot x_2^b \cdot x_3^c \tag{2.10}$$

  Al calcular la derivada parcial de la función (2.10) respecto a cada variable x_i, siguiendo el procedimiento de la ecuación (2.3), y sustituirlas en la expresión de incertidumbre combinada (2.2), se obtiene la ecuación (2.11) tras realizar el álgebra correspondiente:

$$u_{c(Y)} = Y \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{x_1}\right)^2 u_{x_1}^2 + \left(\frac{b}{x_2}\right)^2 u_{x_2}^2 + \left(\frac{c}{x_3}\right)^2 u_{x_3}^2} \tag{2.11}$$

  Se invita al lector a realizar las operaciones indicadas para verificar el resultado. Nótese que la expresión final representa el producto del valor central de la función (Y) por la raíz cuadrada de la suma cuadrática de las incertidumbres relativas ponderadas por sus respectivos exponentes.

4. **Incertidumbre expandida**

   Una vez obtenida la incertidumbre combinada total se procede encontrar la incertidumbre expandida siguiendo los pasos de la sección 6 Estimación de la incertidumbre expandida U_{exp}.

5. **Presentación final de la medida**

   Una vez estimada la incertidumbre expandida se puede presentar la medición tomada con su respectiva incertidumbre.

$$medida = Y \pm U_{exp} \tag{2.12}$$

2.4. Ejemplo 1: Caída libre (medidas tomadas en el mismo punto h)

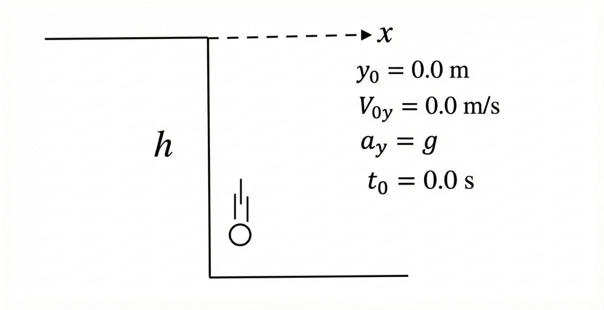

Figura 2.1: Esquema del comportamiento de un cuerpo en caída libre desde el mismo punto h

Se ha realizado un experimento de caída libre con el objetivo de obtener el valor de la gravedad de forma experimental.

En el experimento se dejó caer un balín desde el reposo a una altura de 5.0 m. Se midieron la altura y el tiempo de caída en cinco repeticiones, obteniendo los datos que se presentan a continuación:

Altura [m]:	5.01	4.99	5.01	4.99	5.00
Tiempo [s]:	1.01	1.03	0.99	1.02	1.00

Los instrumentos utilizados para las mediciones fueron:

Flexómetro

Rango de medida:	0.00 m a 8.00 m
Resolución:	0.01 m
Exactitud:	0.02

Cronómetro digital

Rango de medida:	0.00 s a 100.00 s
Resolución:	0.01 s
Exactitud:	0.01 s

Las medidas directas se obtienen como el promedio de las mediciones realizadas para cada variable:

$$\text{Tiempo}(\bar{t}) = 1.01 \text{ s}$$

$$\text{Distancia}(\bar{y}) = 5.00 \text{ m}$$

Paso 1: Identificación de la relación matemática. Se parte de la ecuación de cinemática para caída libre:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2.13}$$

Evaluando las condiciones iniciales ($y_0 = 0$ y $v_{0y} = 0$), se obtiene:

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{2.14}$$

Para obtener el valor de la gravedad a partir de los datos experimentales, se despeja g de la ecuación (2.14). La relación resultante permite calcular la gravedad en función del tiempo y la distancia:

$$g(y,t) = \frac{2y}{t^2} \tag{2.15}$$

Paso 2: Identificación de los aportes a la incertidumbre. Según la ecuación (2.15), la gravedad depende de la posición y y del tiempo t, por lo que ambas variables aportan directamente a la incertidumbre de g.

Se calculan las incertidumbres combinadas para el tiempo y la distancia siguiendo los procedimientos de la sección 1.3:

Incertidumbre por dispersión de datos: Usando la desviación estándar (1.4) y la incertidumbre por repetibilidad (1.3):

$$s_{tiempo} = 0.015811 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad u_{\text{datos}_t} = 0.007071 \text{ s}$$
$$s_{distancia} = 0.010000 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad u_{\text{datos}_y} = 0.004472 \text{ m}$$

Incertidumbre por resolución:

$$u_{\text{resolución}_t} = 0.002887 \text{ s}$$
$$u_{\text{resolución}_y} = 0.005774 \text{ m}$$

Incertidumbre por especificaciones (EMP):

$$u_{\text{EMP}_t} = 0.005774 \text{ s}$$
$$u_{\text{EMP}_y} = 0.000924 \text{ m}$$

Incertidumbres combinadas por variable (1.10):

$$u_{c(t)} = 0.009574 \text{ s}$$
$$u_{c(y)} = 0.007361 \text{ m}$$

Paso 3: Cálculo de la incertidumbre combinada total. Dado que la ecuación (2.15) corresponde a un cociente con potencias, se aplica el Caso 4 de propagación:

$$u_{c(g)} = 0.004765 \text{ m/s}^2$$

Paso 4: Incertidumbre expandida. Se calculan los grados efectivos de libertad (1.12):

$$\nu_{\text{eff}} = 292.03$$

Dado que $\nu_{\text{eff}} > 120$, el factor de cobertura para un nivel de confianza del 95 % es $k = 1.960$.

$$U_{\text{exp}} = k \cdot u_{c(g)} = 0.094012 \text{ m/s}^2$$

Paso 5: Presentación del resultado final. El valor experimental de g se obtiene sustituyendo los promedios en la ecuación (2.15):

$$g_{\text{exp}} = 9.8029 \text{ m/s}^2$$

Redondeando a dos cifras decimales (acorde a la resolución de los instrumentos):

$$g = (9.80 \pm 0.09) \text{ m/s}^2$$

2.5. Ejemplo 2: Caída libre (distribución de medidas, método gráfico)

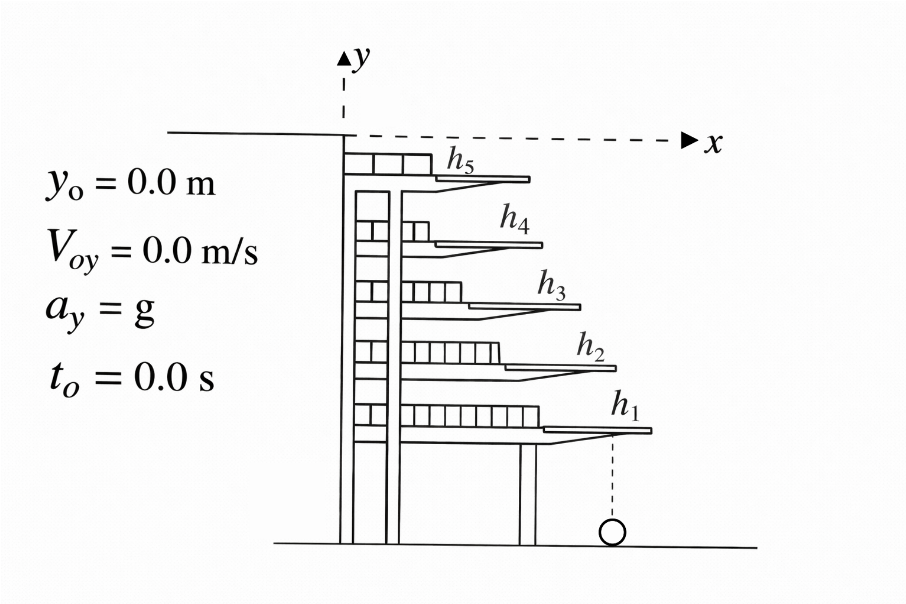

Figura 2.2: Esquema del comportamiento de un cuerpo en caída libre diferentes puntos de h

Se ha realizado un experimento de caída libre con el objetivo de obtener el valor de la gravedad de forma experimental mediante el análisis de una serie de datos.

En el experimento se dejó caer un balín desde el reposo a una altura variable, iniciando en 0.20 m y aumentando en pasos de 0.20 m hasta una altura máxima de 1.60 m. Los datos obtenidos de altura y tiempo de caída se presentan a continuación:

Altura [m]:	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40	1.60
Tiempo [s]:	0.2022	0.2860	0.3502	0.4044	0.4521	0.4952	0.5350	0.5719

Los instrumentos utilizados para las mediciones fueron:

Flexómetro

Rango de medida:	0.00 m a 5.00 m
Resolución:	0.01 m
Exactitud:	0.02 m

Cronómetro digital

Rango de medida:	0.0000 s a 10.0000 s
Resolución:	0.0001 s
Exactitud:	0.0002 s

Paso 1: Dado que los datos corresponden a diferentes alturas, no se realiza un promedio directo. Se debe construir una gráfica con el tiempo como variable independiente (eje X) y la altura como variable dependiente (eje Y). A partir de la relación observada, se elegirá el método de linealización adecuado.

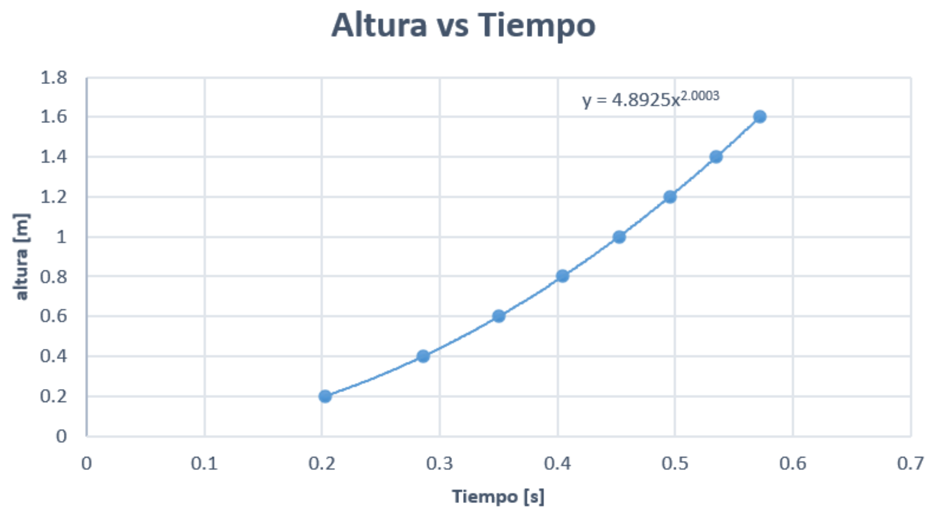

Figura 2.3: Gráfica de datos experimentales (Altura vs. Tiempo).

La gráfica describe una relación parabólica. Para linealizarla, se construye un nuevo gráfico situando la altura en el eje dependiente y el tiempo al cuadrado (t^2) en el eje independiente.

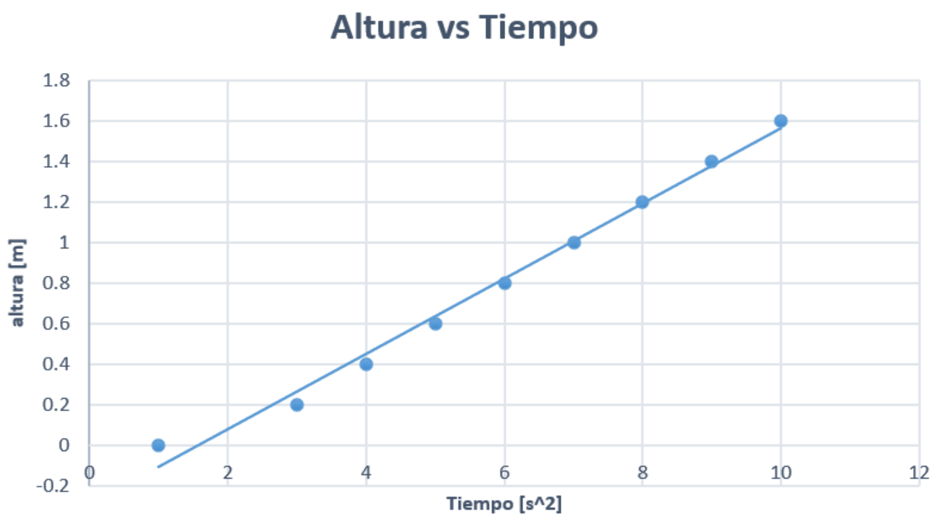

Figura 2.4: Gráfica de datos linealizados (Altura vs. t^2).

Con los datos linealizados se halla la línea de tendencia, cuya ecuación sigue el modelo de la línea recta:

$$y = m \cdot x + b \tag{2.16}$$

Para obtener la pendiente (m), el intercepto (b) y sus respectivas incertidumbres, se utiliza la función `ESTIMACION.LINEAL(y, x, 1, 1)` de Google Sheets. El parámetro "1"final permite obtener las estadísticas adicionales de la regresión. Si se desea forzar el paso por el origen (donde $b = 0$), se utiliza `ESTIMACION.LINEAL(y, x, 0, 1)`.

En la figura (2.5) se muestra la matriz que regresa la función estimación lineal, los valores en gris claro no son usados para la estimación de la incertidumbre, la incertidumbre del intercepto se muestra como error ya que este tiene un valor de cero.

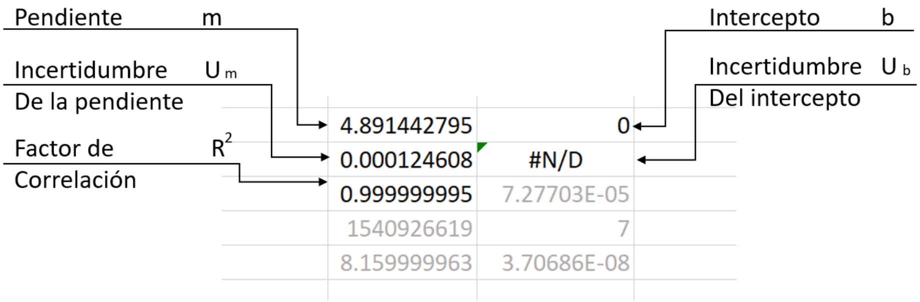

Figura 2.5: Matriz de la función estimación lineal forzada a pasar por cero.

De acuerdo con los resultados de la regresión lineal, la ecuación que modela el fenómeno es:

$$y = 4.891442x \tag{2.17}$$

Al comparar este resultado con la ecuación de cinemática para caída libre desde el reposo:

$$y = \frac{1}{2}g \cdot t^2 \tag{2.18}$$

Se identifica que la pendiente $m = 4.89144$ equivale a $\frac{1}{2}g$, y la variable x corresponde a t^2. Por lo tanto:

$$4.89144 = \frac{1}{2}g \implies g = 2 \cdot 4.89144 = 9.78288 \text{ m/s}^2 \tag{2.19}$$

Paso 2: En el método gráfico, el valor de la gravedad depende directamente de la pendiente obtenida en la regresión lineal.

Paso 3: La incertidumbre combinada se asocia al Caso 4 de propagación, considerando que la pendiente m tiene una incertidumbre estándar $u_m = 0.0001246$ entregada por la regresión:

$$u_{c(g)} = g \cdot \sqrt{\left(\frac{u_m}{m}\right)^2} = 9.78288 \cdot \left(\frac{0.0001246}{4.89144}\right) \tag{2.20}$$

Tras operar, se obtiene la incertidumbre combinada de la gravedad:

$$u_{c(g)} = 0.000249 \text{ m/s}^2$$

Paso 4: En este método, al basarse en los parámetros estadísticos de una regresión sobre múltiples puntos, se reporta la incertidumbre combinada total.

Paso 5: La medida final se expresa como el valor calculado más o menos su incertidumbre:

$$g = (9.7829 \pm 0.0003) \text{ m/s}^2$$

Bibliografía

[1] Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM). *JCGM 200:2012. Vocabulario Internacional de Metrología – Conceptos fundamentales y generales, y términos asociados (VIM).* JCGM, 3ª edition, 2012. Versión oficial en español.

[2] Octavio A. Calsadilla Amaya and C. C. *Nociones de incertidumbre en la medición según la guía para la expresión de la incertidumbre en la medición GUM.* Editorial Universitaria FÉLIX VARELA, La Habana, 2015.

[3] Eduart Yesid Castrillón González, Nancy Janet Castillo Rodríguez, and William Olarte Cortés. *Prototipos para la enseñanza de medidas directas en la Física I y la Metrología.* Universidad Tecnológica de Pereira, 2025.

[4] EURAMET. *EURAMET cg-18: Guidelines on the Calibration of Digital Multimeters*, version 4.0 edition, 2019. Section 5.1: The accuracy of a DMM is usually specified as percent of reading + percent of range + n digits.

[5] International Electrotechnical Commission. Iec 61010-2-030:2020 – safety requirements for electrical equipment for measurement, control, and laboratory use, 2020. Part 2-030: Particular requirements for equipment for testing and measuring circuits.

[6] BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, and OIML. *Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM)*, jcgm 100:2008 edition, 2008. Section 4.3.7: Digital indication resolution may contribute an uncertainty component.

[7] International Organization for Standardization and International Electrotechnical Commission. Iso/iec 17025:2017 – general requirements for the competence of testing and calibration laboratories, 2017. Annex A: Manufacturer specifications may include fixed terms.

[8] Wolfgang A Schmid, Rubén Lazos, et al. Guía para estimar la incertidumbre de la medición. *CENAM, El Marquez, Qro., México*, 2000.

[9] Centro Español de Metrología. *Guía para la expresión de la incertidumbre de medida.* Centro Español de Metrología, 2000.

[10] John R. Taylor. *An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements.* University Science Books, 1997.

[11] Philip R. Bevington and D. Keith Robinson. *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences.* McGraw-Hill, 2003.

[12] John Quiroga H, Beatriz Cruz M. *Incertidumbre - Interpolación Lineal*. Universidad Tecnológica de Pereira, 2021. Versión oficial en español.